

Застосування моделі Тимошенка при дослідженні сучасних проблем теорії оболонок

Олександр Григоренко
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

International scientific conference «Actual Problems of Mechanics»
(to the 145th anniversary of the birth of S.P. Timoshenko) KYIV November 14-16 2023

Фундаментальні праці С.П.Тимошенка з теорії пластин та оболонок



1. Timoshenko, S.P., 1921, On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Philosophical Magazine, p. 744.
2. Timoshenko, S.P., 1922, On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Philosophical Magazine, p. 125.
3. Timoshenko, S.P., 1959, Theory of Plates and Shells , McGraw-Hill Book Company, 1st Ed. 1940, 2nd Ed. (with S. Woinowsky-Krieger)

Основне положення теорії деформації згину Тимошенка:

врахування деформацій зсуву та обертальних інерційних ефектів, що робить її придатною для опису поведінки коротких балок, сендвіч-композитних балок або балок, що знаходяться під дією високочастотних коливань, коли довжина хвилі наближається до товщини самої балки.

Дослідження з теорії оболонок в Інституті механіки імені С.П.Тимошенка НАН України

Академіки НАН України, дослідження яких зіграли важливу роль у розробці загальної теорії оболонок та методів їх розрахунку:

А.Д.Коваленко, Г.М. Савін, М.О. Кільчевський, Я.М. Григоренко,
Ю.М. Шевченко, О.М. Гузь, В.Д.Кубенко



Основні праці вчених Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України з теорії оболонок

Kovalenko, A.D., Grigorenko, Ya.M., Illin, L.A., Polischuck, T.I.
The design of conical shells subjected to antisymmetric loadings. - National Aeronautics and Space Administration Technical Translation, 1969

Методы расчета оболочек : В 5-ти томах / Отв. ред. А.Н. Гузь.
Т. 1. 1980, : Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями
А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, В.Н. Чехов и др.
Т. 2. 1980 : Теория ребристых оболочек. И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий
Т. 3. 1981 : Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. Ю.Н. Шевченко, И.В. Прохоренко
Т. 4. 1981 : Теория оболочек переменной жесткости. Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко
Т. 5. 1982 : Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек
А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко

Сучасні монографії

Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций // К: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.

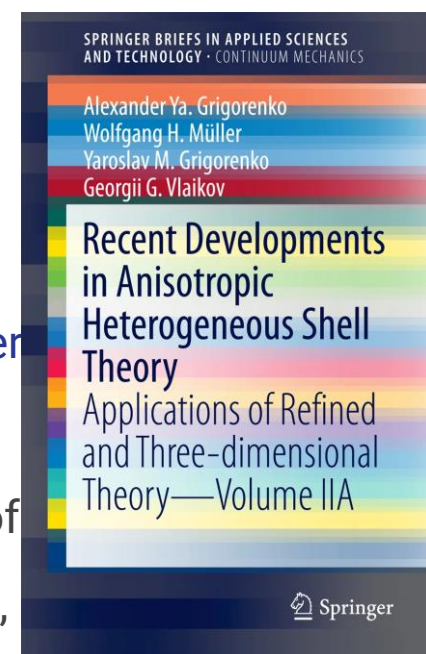
Головко К.Г. , П.З. Луговой, В.Ф. Мейш Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках // К: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.

Дана постановка задач коливань підкріплених оболонок обертання з урахуванням дискретності розташування ребер згідно класичних моделей оболонок та оболонок і стрижнів типу Тимошенка на пружній основі з відповідними граничними та початковими умовами. і розроблено відповідний ефективний алгоритм для реалізації його на сучасних персональних комп'ютерах. Проведено дослідження та аналіз результатів впливу дискретних ребер на динамічні характеристики складних оболонкових конструктивних елементів. Наведено результати досліджень поведінки сендвіч-оболонкових конструкцій при імпульсних навантаженнях різного типу.

Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. Vlaikov G.G. Problems of Mechanics for Anisotropic Inhomogeneous Shells Based on the Different Models// Kyiv, 2009, Academperiodika, 550 p.

Grigorenko A.Ya., Müller W.H, Ya.M. Grigorenko Ya.M., Vlaikov G.G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory// General theory and applications of classical theory. Volume I,II, Springer 2016.

Approaches to the solution of linear and geometrically nonlinear problems of mechanics (statics and dynamics) of shells on the basis of discrete-continual methods in classical, refined, and spatial formulations along with the basic principles and equations of classical, refined, and spatial models for anisotropic inhomogeneous shells with variable geometrical and mechanical parameters are presented. The results of an investigation into the stress state and dynamic characteristics of shells with various shape and structure are analyzed depending on the variation of basic parameters. Calculations of specific structural members are carried out



Луговий П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур: Видавництво Ліра, К, 2022. 326 с.

Монографія присвячена теоретичним і практичним питанням дослідження динамічних процесів в конструктивно неоднорідних оболонкових структурах складної геометрії на основі оболонкової моделі типу Тимошенка. Велика увага приділяється використанню та розвитку Аналітичних, скінченно-різницевих і скінченно-елементних методів розв'язку поставлених задач. У книзі представлені результати багаторічних теоретичних досліджень, в більшій частині прикладних, які знайшли своє застосування в різних галузях техніки.

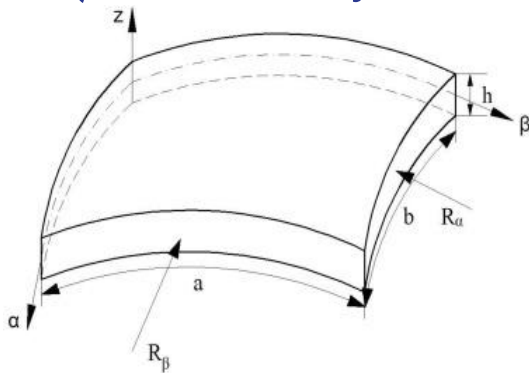
Підручник та навчальні посібники:

Я. М. Григоренко, Л. В. Мольченко Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності. Підручник. К.: Видавничо-поліграфічний Центр Київський університет, 2009. –403 с.

Я.М.Григоренко, В.Д.Будак, О.Я. Григоренко Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів// Миколаїв, «Ілліон», 2010 -294с.

Budak V. D.,Grigorenko A. Ya. Free Vibrations of Anisotropic Heterogeneous Shells Structures// Mykolaiv «Ilion» 2017 , 247 p

Дослідження стаціонарного деформування деяких класів оболонок на основі теорії Тимошенка у відділі обчислювальних методів (зав. відділу член-кор. НАН України О.Я. Григоренко)

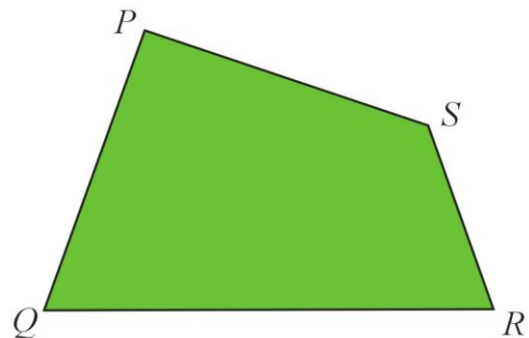


Пологі оболонки і чотирикутні пластини

Grigorenko, A.Y., Yaremchenko, N.P. Stress-strain state of shallow shells with rectangular planform and varying thickness: Refined formulation. *Int Appl Mech* **43**, 1132–1141 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0113-8>

Grigorenko, A.Y., Parkhomenko, A.Y. Free vibrations of shallow nonthin shells with variable thickness and rectangular planform. *Int Appl Mech* **46**, 776–789 (2010). <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0367-4>

Grigorenko, A.Y., Pankrat'ev, S.A. & Yaremchenko, S.N. Influence of Orthotropy on the Stress–Strain State of Quadrangular Plates of Different Shapes. *Int Appl Mech* **55**, 199–210 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10778-019-00950-6>



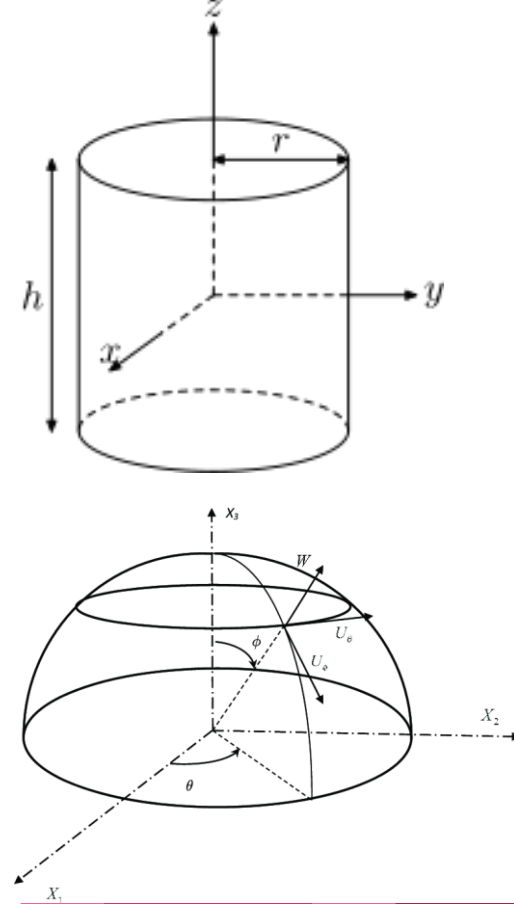
Циліндричні і сферичні оболонки

Grigorenko, Y.M., Yaremchenko, S.N. Stress Analysis of Orthotropic Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness in a Refined Formulation. *International Applied Mechanics* **40**, 266–274 (2004). <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000031908.21514.3b>

Grigorenko, A.Y., Efimova, T.L. & Sokolova, L.V. On the investigation of free vibrations of nonthin cylindrical shells of variable thickness by the spline-collocation method. *J Math Sci* **181**, 506–519 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0702-x>

Grigorenko, A.Y., Vovkodav, O.V. & Yaremchenko, S.N. Stress–Strain State of Nonthin Spherical Shells of Variable Thickness under Localized Loads. *Int Appl Mech* **49**, 315–321 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0569-7>

Grigorenko, Y.M., Grigorenko, A.Y., Kryukov, N.N. *et al.* Design of Cylindrical Shells with Oblique Cuts in Refined Statement Using Spline-Approximation*. *Int Appl Mech* **56**, 326–333 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01014-w>

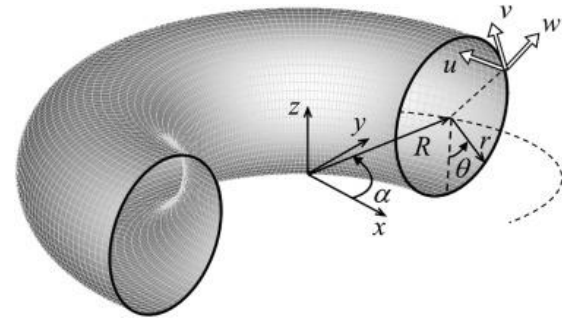
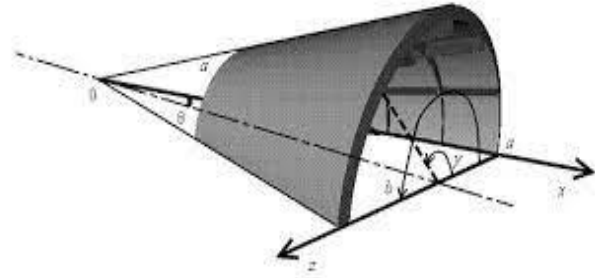


Конічні і тороїдальні оболонки

Grigorenko, Y.M., Avramenko, O.A. & Yaremchenko, S.N. Spline-approximation solution of two-dimensional problems of statics for orthotropic conical shells in a refined formulation. *Int Appl Mech* **43**, 1218–1227 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0125-4>

Grigorenko, Y.M., Avramenko, O.A. Stress-strain analysis of closed nonthin orthotropic conical shells of varying thickness. *Int Appl Mech* **44**, 635–643 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0081-7>

Grigorenko, Y.M., Avramenko, Y.A. On the solution of the problems of statics of toroidal shells with rigidly fixed end faces in the refined formulation. *J Math Sci* **194**, 278–284 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1527-y>



Дослідження оболонок на основі ідей Тимошенка у відділі динаміки та стійкості суцільних середовищ (зав. відділу академік НАН України В.Л. Богданов)

Ідеї Тимошенка використовувались у відділі в задачах концентрації напружень в композитних оболонках з отворами та в задачах стійкості пластин та панелей.

Перші шаруваті композитні матеріали (КМ) мали понижену міжшарову зсувну жорсткість.

Найпростішою моделлю такого КМ є однорідний матеріал з середніми характеристиками, які визначаються експериментально чи теоретично. Вагомий вклад в розробку аналітичних і чисельних методів дослідження концентрації напружень біля отворів в трансверсально ізотропних та ортотропних оболонках внесли д.т.н. К.І.Шнеренко з учнями. Причому КМ вважались лінійно пружними, а деформації малими, що притаманно крихким КМ.

Згодом виявилось, що деякі полімерні КМ (ПКМ) за підвищених рівнях навантажень проявляють нелінійно-пружні властивості. Вони обумовлені як і нелійними властивостями компонентів ПКМ, так і структурними змінами в композиті з навантаженням, що називають структурною не лінійністю.

Причому більшості ПКМ є характерним зростання анізотропії в нелінійній стадії деформування.

Для побудови теорії деформування ПКМ є два підходи. Структурний (Л.П.Хорошун), в якому властивості КМ теоретично розраховуються на основі властивостей компонентів, і феноменологічний (В.А.Ломакін, Є.Курчаков), в якому теорія ПКМ будується на основі експериментів. З огляду на різноманіття компонентів і методів виготовлення КМ простішим вбачається феноменологічний підхід. Такий підхід використали чл.-кор. І.С.Чернишенко з учнями для розробки методик розрахунків напружено-деформованого стану (НДС) тонких й середньої товщини оболонок з нелінійно-пружних ортотропних ПКМ.

Якщо розрахунки НДС оболонок з КМ з пониженою зсувною жорсткістю класичними сітковими методами не викликає ніяких ускладнень, то існує так звана проблема зсувного замикання стосовно сучасних просторово армованих КМ з «немалою» зсувною жорсткістю. Вона полягає у сповільненій збіжності чисельних методів при застосуванні зсувних моделей до конструкцій з таких матеріалів.

Співробітники ВДССС (В.Максимюк, Є.Сторожук) запропонували й розробили альтернативні підходи для подолання небажаних обчислювальних ефектів і прискорення збіжності чисельних методів. Це підходи, що базуються на: змішаних функціоналах, методі множників Лагранжа, векторних співвідношеннях для деформацій, використанні точок надзбіжності, подвійній апроксимації деформацій. Такі вдосконалені методи дозволяють розраховувати НДС оболонок з нелінійно-пружних ПКМ довільної зсувної жорсткості, включаючи граничний випадок гіпотез Кіргофа-Лява.

В останні роки у відділі (Є.Сторожук) вдалося знайти аналітичні та аналітично-чисельні розв'язки задач стійкості пологих і непологих оболонок, наслідуючи ідеї Тимошенка.

Maksimyuk, V.A., Storozhuk, E.A. & Chernyshenko, I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *Int Appl Mech* **48**, 613–687 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>

Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – 52, N 4. – P. 386 –397.

Storozhuk E.A., Yatsura, A.V. Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – 53, N 3. – P. 313 – 325.

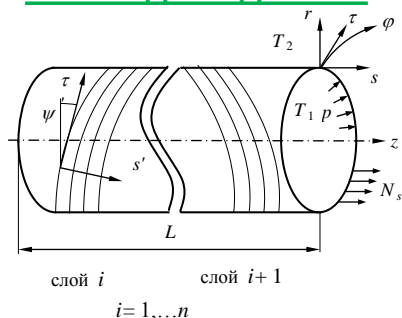
Storozhuk E.A. Exact Solution of a Geometrically Nonlinear Problem for a Shear-Compliant Oval Cylindrical Shell // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – 58, N 6. – P. 653 –672.

Сторожук Є.А. Нелінійне деформування і стійкість піддатливих на поперечний зсув довгих циліндричних панелей некругового перерізу // *Прикл. механіка.* – 2023. – 59, №6. – С. 41 – 58.

Завідувач відділом термопластичності д.т.н. О.З.Галішін

Розробка методики розрахунку термопружного стану оболонкових корпусних елементів ракетної техніки, виготовлених перехресною намоткою

Об'єкт дослідження



Розв'язувальні рівняння

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s);$$

$$\vec{N} = \left\{ N_s, N_{s\varphi}, M_s, M_{s\varphi}, Q_s, u, v, \psi_s, \psi_\varphi, w \right\}^T$$

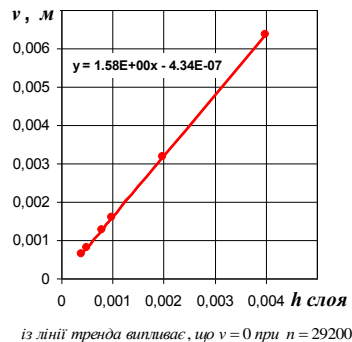
$$B_k \vec{Y} = \vec{b}_k \quad \text{при} \quad s=0; \Delta L$$

Вихідні данні

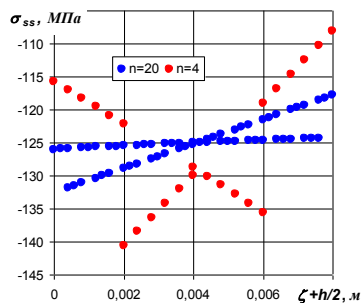
$$\psi = \pm \pi / 2; \quad N_s = -1 \text{ МПа} \cdot \text{м}; \quad p = 0,1 \text{ МПа}$$

$$T_1 = 100\text{C}; \quad T_2 = 0$$

Колове переміщення



Осьове напруження

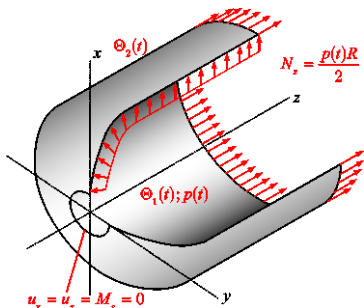


Основні результати

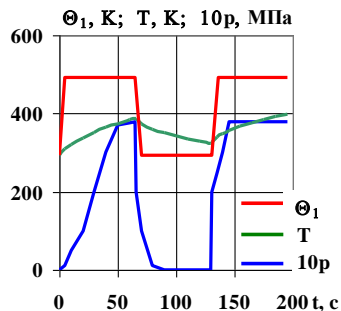
Розроблено методику визначення термопружного напружено-деформованого стану тонкостінних оболонкових елементів конструкцій ракетної техніки, виготовлених перехресним намотуванням. Цю методику можна використовувати для розрахунків ПДВ зазначених елементів конструкцій на стадії проектування та експлуатації.

Розробка методів визначення НДС та руйнівного навантаження тонкостінних елементів ракетних конструкцій при повторному нагріванні та навантаженні

Об'єкт дослідження



Умови нагріву й навантаження



Визначення нестационарних температурних полів

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(F^{(s)} + F^{(\varepsilon)});$$

$$F^{(s)} = \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \rho \right) \frac{\partial T}{\partial s};$$

$$F^{(\varepsilon)} = \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + k \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta};$$

Гран. умови $\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\lambda}(T - \theta);$

МКР; явная схема по t

НДС оболонок обертання при повторному навантаженні

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + 3\lambda\varepsilon_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(d)};$$

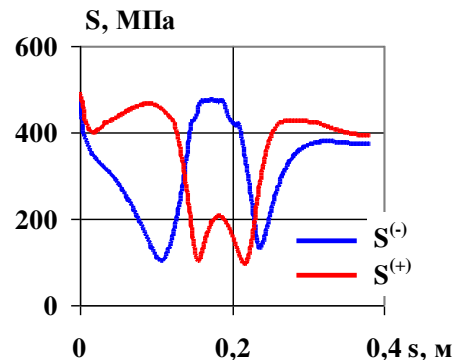
$$\sigma_{ij}^{(d)} = 2G(e_{ij}^{(p)}) + K\varepsilon_T\delta_{ij};$$

Розв'язувальні рівняння

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s);$$

$$B_1\vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1; \quad B_2\vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2$$

Результати розрахунків при t=195c

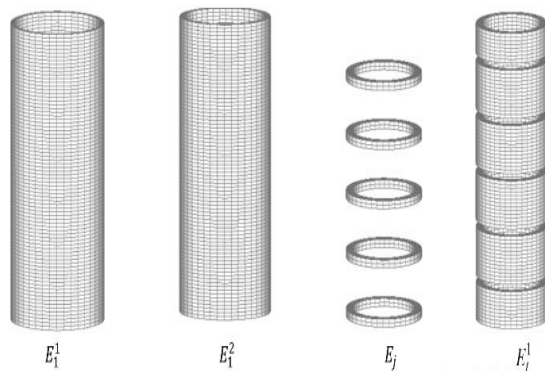


Умовні позначення

Θ_1 і Θ_2 - температури навколишнього середовища на внутрішній і зовнішній поверхні
 T - температура на внутрішній поверхні оболонки
 p - внутрішній тиск
 S - інтенсивність дотичних напружень на внутрішній (-) і зовнішній (+) поверхні

Відділ будівельної механіки токостінних конструкцій Завідувач відділом д.т.н., проф. П.З. Луговий
Розробка методики розрахунку НДС тришарових циліндричних елементів ракетної техніки неоднорідних за товщиною при імпульсних навантаженнях

Об'єкт дослідження



Розв'язувальні рівняння

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t)$$

Вихідні данні

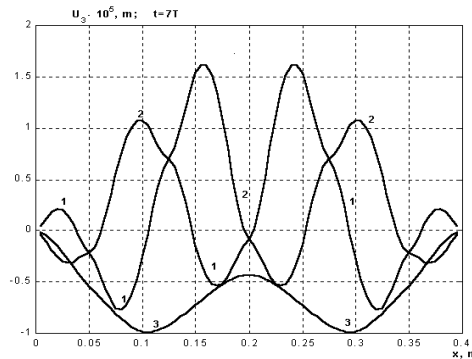
$$\frac{L}{h_1} = 40; h_1 = h_2 = 0,01\text{м}; \frac{R_1}{h_1} = 10^2;$$

$$E_1^1 = E_1^2 = E_i = 7 \cdot 10^{10} \text{Па.}$$

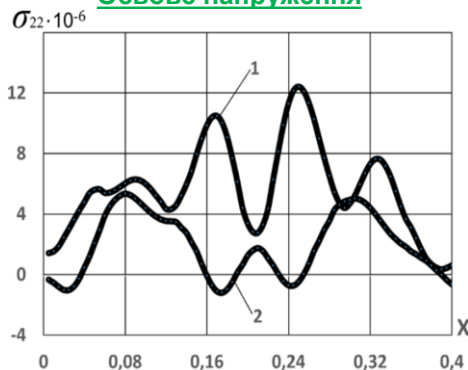
$$\bar{F}_3(t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

Результати розрахунків

Нормальне переміщення



Осьове напруження

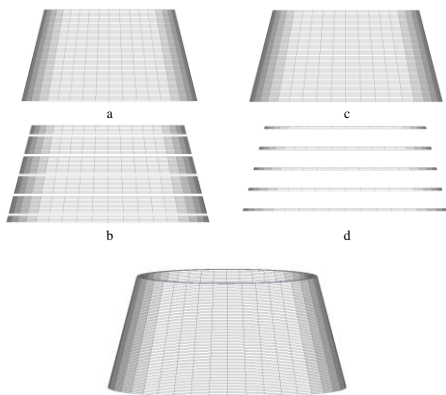


Основні результати

Розроблено методику визначення напружено-деформованого стану тришарових циліндричних елементів ракетної техніки, в яких заповнювач виготовлений з легкого матеріалу армваного ребрами жорсткості. Цю методику можна використовувати для розрахунків НДС зазначених елементів конструкцій на стадії проектування при виборі оптимального співвідношення вага/міцність та при експлуатаційних навантаженнях.

Відділ будівельної механіки токоєтінних конєтрукцій Завідувач відділом д.т.н., проф. П.З. Луговий
Розробка методики розрахунку НДС тришарових конічних елементів ракетної техніки при змінній амплітуді збурювального навантаження

Об'єкт дослідження



Розв'язувальні рівняння

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t)$$

Вихідні данні

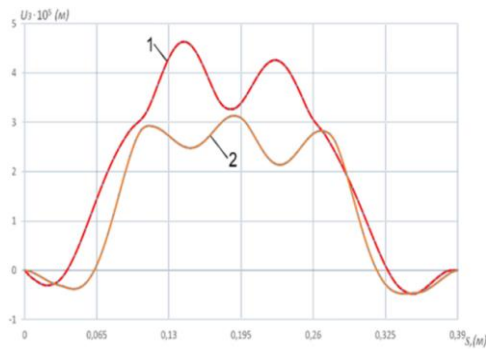
$$\frac{L}{h_1} = 40; h_1 = h_2 = 0,01\text{м}; \frac{R_1}{h_1} = 10^2;$$

$$E_1^1 = E_1^2 = E_i = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па.}$$

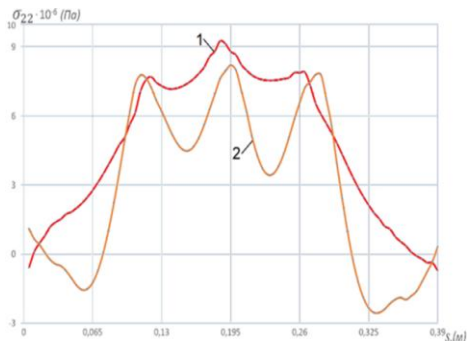
$$\bar{F} = A \sin \left[\vartheta \frac{t^2}{t_c} \left(1 - \frac{t}{3t_c} \right) \right]$$

Результати розрахунків

Нормальний прогин



Колове напруження



Основні результати

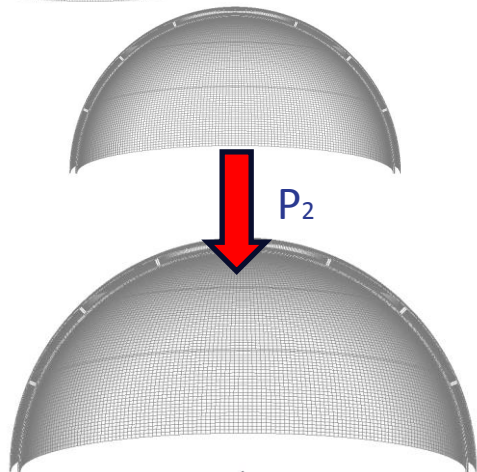
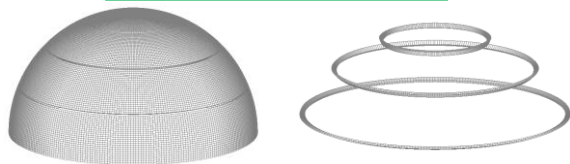
Проведений аналіз динамічних та вільних коливань усічених тришарових конічних оболонок з FGM заповнювачем, які піддаються внутрішньому або зовнішньому механічному ударному навантаженню, виявив можливість уникнення резонансних явищ

Розробка методики розрахунку НДС тришарових сферичних елементів обтічника неоднорідних за товщиною при зосередженому ударі

Визначення прогинів

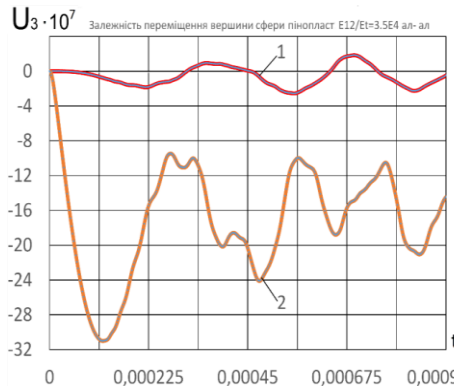
Результати розрахунків при зосередженому ударі по вершині обтічника

Об'єкт дослідження

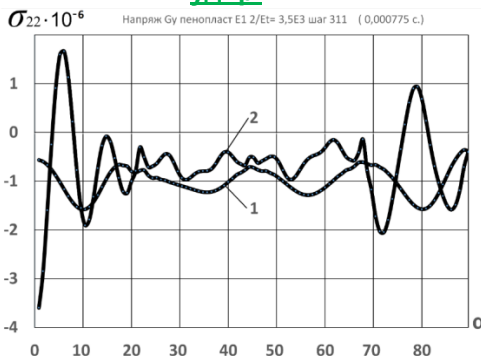


Умови пестационарного навантаження

$$P_2(s_0, t) = \begin{cases} A(1 - \frac{t}{T}), & (0 \leq t \leq T); \\ 0, & (t > T), \end{cases}$$



МКР; явна схема по t
Колові напруження при зосередженому удврі



Розрахунки показали, що максимальні нормальні прогини не перевищують $0,2h$, а напруження – $\sigma_{22} \leq 4 \times 10^6$ Па. Аналіз підтвердив, що обтічник зберігає свою працездатність після впливу на нього в напрямку осі зосередженого удару. Представлена методика може бути використана при проектуванні об'єктів складної геометрії, стійких до дії ударних навантажень.

Дякую за увагу

Thank you very much for your attention